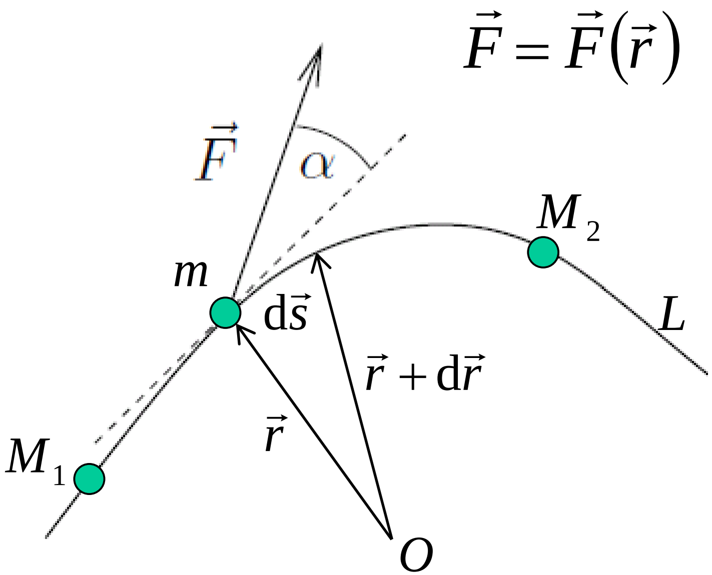
Mechanická práce, okamžitý výkon



- **Elementární práci** definujeme:

$$\mathrm{d}A \equiv \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = F\, \mathrm{d}s \cos\alpha, \quad [\mathrm{J}]$$

- Výsledná **práce** silového pole po dráze z M_1 do M_2:

$$A_{21} = \int_{L(M_1)}^{L(M_2)} \vec{F}\, \mathrm{d}\vec{s} \quad [\mathrm{J}]$$

$$A_{12} = \int_{L(M_2)}^{L(M_1)} \vec{F}\, \mathrm{d}\vec{s} = -\int_{L(M_1)}^{L(M_2)} \vec{F}\, \mathrm{d}\vec{s} = -A_{21}$$

- Pokud je rovnice křivky zadaná parametricky:

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

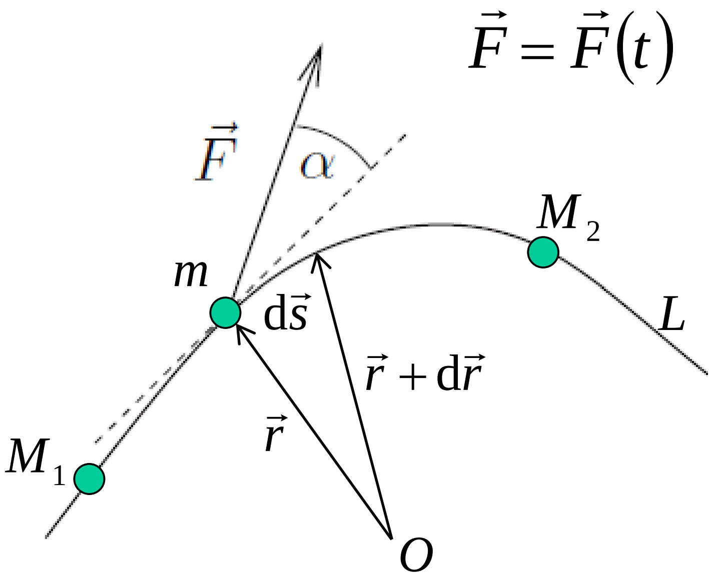
$$A_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\vec{F} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \right) \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \left(\vec{F} \cdot \vec{v} \right) \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{dA}{dt} \right) \mathrm{d}t$$

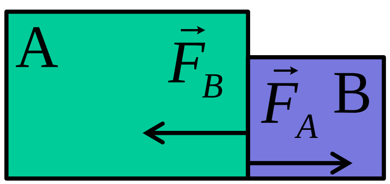
- **Okamžitý výkon** definujeme:

$$P \equiv \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \cdot \vec{v}, \quad [\mathrm{W}]$$

Časový účinek síly, impuls síly, zákon zachování hybnosti

$$\vec{F} = \vec{F}(t)$$





- Změna hybnosti těles je dána působením sil v časovém intervalu <t_1, t_2>:

$$\Delta\vec{p}_A = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_A \mathrm{d}t \quad \Delta\vec{p}_B = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_B \mathrm{d}t$$

- Podle druhého Newtonova zákona se projeví působení síly během elementárního časového intervalu dt elementární změnou hybnosti:

$$\mathrm{d}\vec{p} = \vec{F}\,\mathrm{d}t, \quad \Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,\mathrm{d}t$$

- Integrál na pravé straně nazýváme **Impuls síly**:

$$\vec{J} \equiv \vec{I} \equiv \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,\mathrm{d}t$$

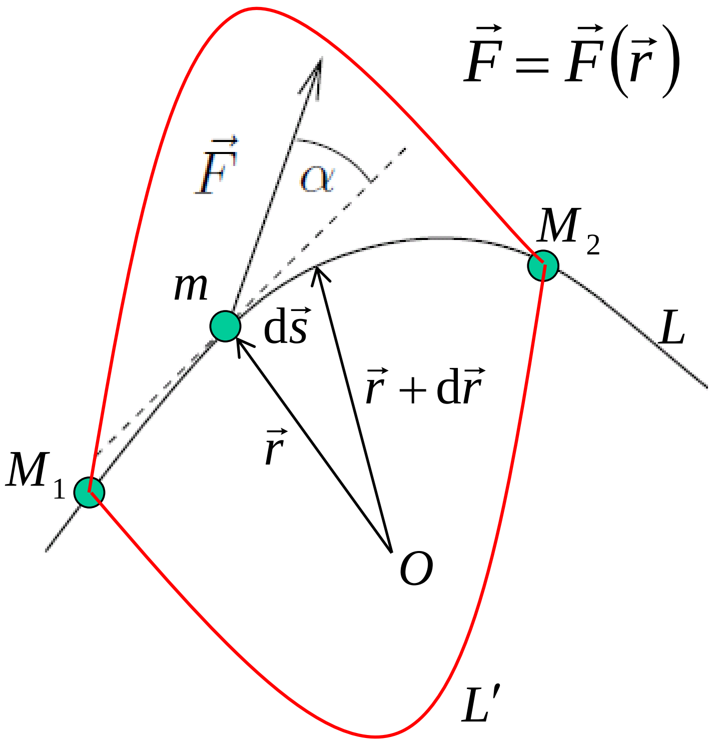
$$\Delta\vec{p} = \vec{J}$$

- **Zákon zachování hybnosti** plyne ze 3 New. zák.:

$$\vec{F}_A = -\vec{F}_B \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_A dt = -\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_B dt \Rightarrow \Delta\vec{p}_A + \Delta\vec{p}_B = 0$$

$$\vec{p}_A(t_1) + \vec{p}_B(t_1) = \vec{p}_A(t_2) + \vec{p}_B(t_2) = konst.$$

Mechanická práce, kinetická energie



- Vztah pro elementární práci přepíšeme na tvar:

$$\mathrm{d}A = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\vec{s}, \quad \mathrm{d}\vec{s} = \vec{v}\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}A = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{v}\mathrm{d}t = m(\vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{v}) = \frac{1}{2}m\mathrm{d}(\vec{v} \cdot \vec{v}) =$$

$$= \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \mathrm{d}W_k$$

- **Kinetickou energii** hmotného bodu zavedeme vztahem:

$$W_k \equiv E_k \equiv \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} \quad [\mathrm{J}]$$

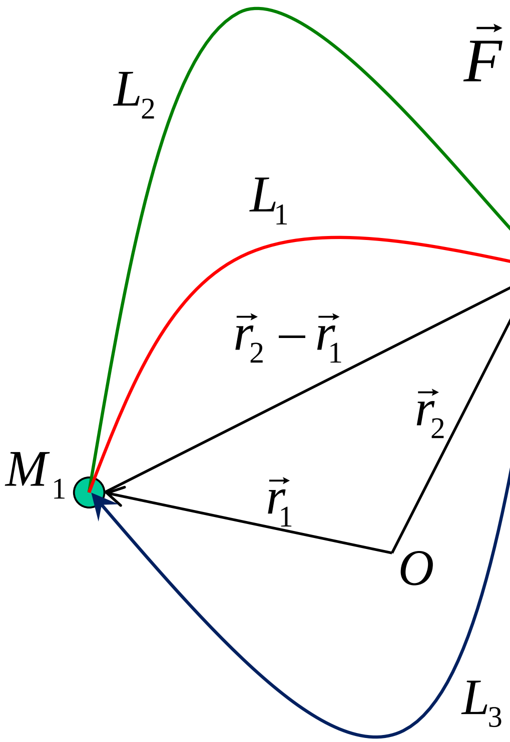
- Výsledná **práce** silového pole po dráze z M_1 do M_2:

$$\int_{L(M_1)}^{L(M_2)} \mathrm{d}W_\mathrm{k} = [W_\mathrm{k}]_{M_1}^{M_2} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \Delta W_k = A_{21}$$

- **Konzervativní** (potenciálová) silová pole:

$$A_{11} = \oint_{L'} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0$$

Mechanická práce, potenciální energie



$$\vec{F}=\vec{F}(\vec{r})$$

- **Konzervativní** (potenciálová) silová pole:

$$A_{11}=\oint_L \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{s}=0,\quad \vec{F}(\vec{r})=\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k(\vec{r})$$

- Práce A_{21} vykonaná silovým polem z bodu M_1 do bodu M_2 nezávisí na tvaru dráhy mezi oběma body:

$$A_{21}(L_1)=\int_{L_1(M_1)}^{L_1(M_2)}\vec{F}\cdot d\vec{s},\quad A_{21}(L_2)=\int_{L_2(M_1)}^{L_2(M_2)}\vec{F}\cdot d\vec{s},$$

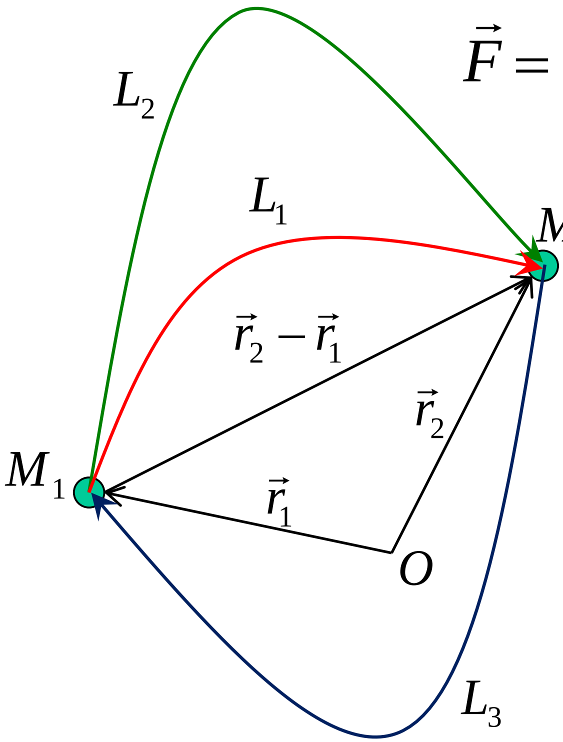
$$A_{12}(L_3)=\int_{L_3(M_2)}^{L_3(M_1)}\vec{F}\cdot d\vec{s},$$

$$L=L_1+L_3,\quad L'=L_2+L_3$$

$$A_{11}(L)=\oint_L \vec{F}\cdot d\vec{s}=A_{21}(L_1)+A_{12}(L_3)=A_{11}(L')=\oint_{L'}\vec{F}\cdot d\vec{s}=A_{21}(L_2)+A_{12}(L_3)=0$$

$$\Rightarrow A_{21}(L_1)=A_{21}(L_2)$$

Mechanická práce, potenciální (polohová) energie



$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$$

- Jelikož práce A_{21} nezávisí na tvaru dráhy, ani odpovídající změna kinetické energie nezávisí na tvaru dráhy:

$$\Delta W_{\mathrm{k}}(L_1) = \Delta W_{\mathrm{k}}(L_2) = A_{21}(L_1) = A_{21}(L_2)$$

$$A_{21}(L_1) = A_{21}(L_2) = A_{21}\left(\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|\right)$$

- Protože velikost vektoru nezávisí na volbě souřadnic, nezávisí na ní ani hodnota A_{21}. Pomocí veličiny A_{21} můžeme každé poloze hmotného bodu přiřadit číslo $W_{\mathrm{p}}(\vec{r})$, které nazveme **potenciální (polohová) energie**

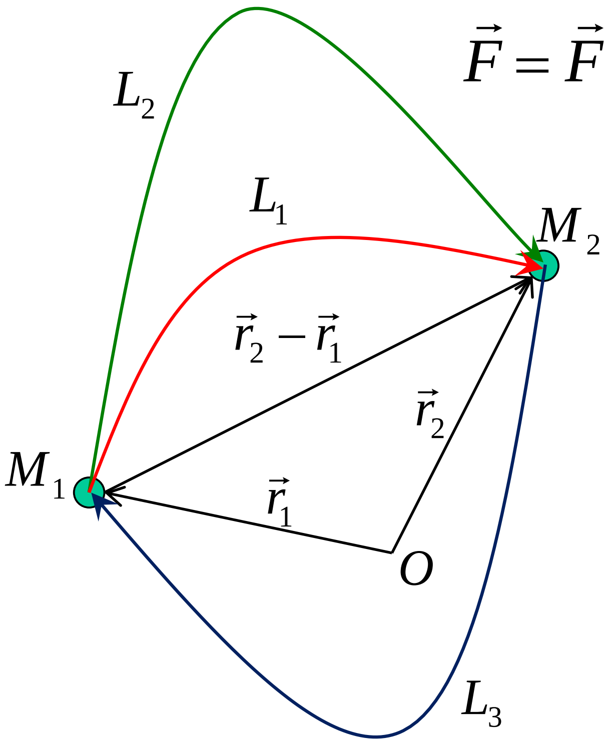
$$W_{\mathrm{p1}} \equiv E_{\mathrm{p1}} \equiv W_{\mathrm{p}}(\vec{r}_1) = C$$

$$W_{\mathrm{p2}} = W_{\mathrm{p}}(\vec{r}_2) = W_{\mathrm{p1}} - A_{21} = C - A_{21}$$

- Zavedeme-li rozdíl potenciálních energií hmotného bodu v polohách M_1a M_2 vztahem:

$$\Delta W_{\mathrm{p}} = W_{\mathrm{p2}} - W_{\mathrm{p1}} \Rightarrow A_{21} = -\Delta W_{\mathrm{p}}$$

Mechanická práce, zákon zachování energie



$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$$

- Jelikož :

$$A_{21} = \Delta W_{\mathrm{k}} \Rightarrow \Delta W_{\mathrm{k}} = -\Delta W_{\mathrm{p}}$$

$$W_{\mathrm{k2}} - W_{\mathrm{k1}} = -W_{\mathrm{p2}} + W_{\mathrm{p1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_{\mathrm{k2}} + W_{\mathrm{p2}} = W_{\mathrm{k1}} + W_{\mathrm{p1}} = konst.$$

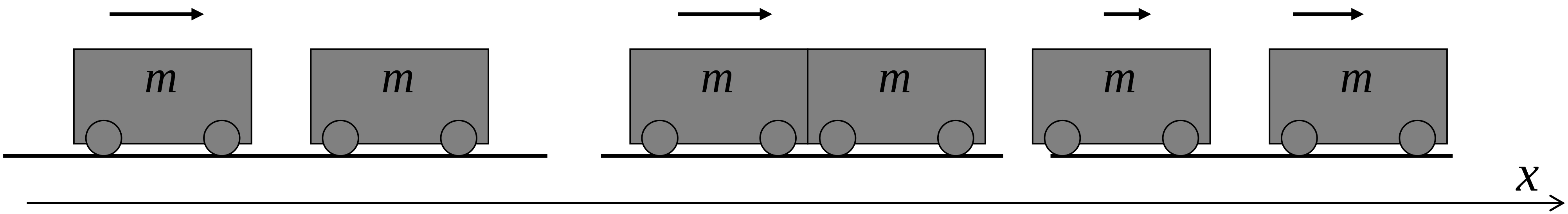
- Nazvěme součet kinetické a potenciální energie hmotného bodu (tělesa) **mechanickou energií.** Vidíme, že se při pohybu hmotného bodu v konzervativním silovém poli mechanická energie nemění, zůstává zachována (konzervována):

$$W_m \equiv W_{\mathrm{k}} + W_{\mathrm{p}} = E_{\mathrm{k}} + E_{\mathrm{p}} = konst.$$

- Tento vztah nazýváme **zákonem zachování mechanické energie.**

Příklad - Zákon zachování hybnosti a energie – pružná srážka

$\vec{v} = \left(v_x, 0, 0\right)$ $\quad$ $\vec{v} = \left(v_x, 0, 0\right)$ $\quad$ $\vec{v}_1 = \left(v_{1x}, 0, 0\right)$ $\quad$ $\vec{v}_2 = \left(v_{2x}, 0, 0\right)$



zákon zachování hybnosti: $m\vec{v} = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2$ $\qquad$ $v_x = v_{1x} + v_{2x} \longrightarrow v_{2x} = v_x - v_{1x}$

$$mv_x = mv_{1x} + mv_{2x} \qquad v_x^2 = v_{1x}^2 + v_{2x}^2$$

zákon zachování energie: $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2$ $\qquad$ $v_{1x}\left(v_{1x} - v_x\right) = 0$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_y^2} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_x^2 = \frac{1}{2}mv_{1x}^2 + \frac{1}{2}mv_{2x}^2$$

$$v_{1x} = 0 \quad v_{2x} = v_x$$

$$v_{1x} = v_x \quad v_{2x} = 0$$

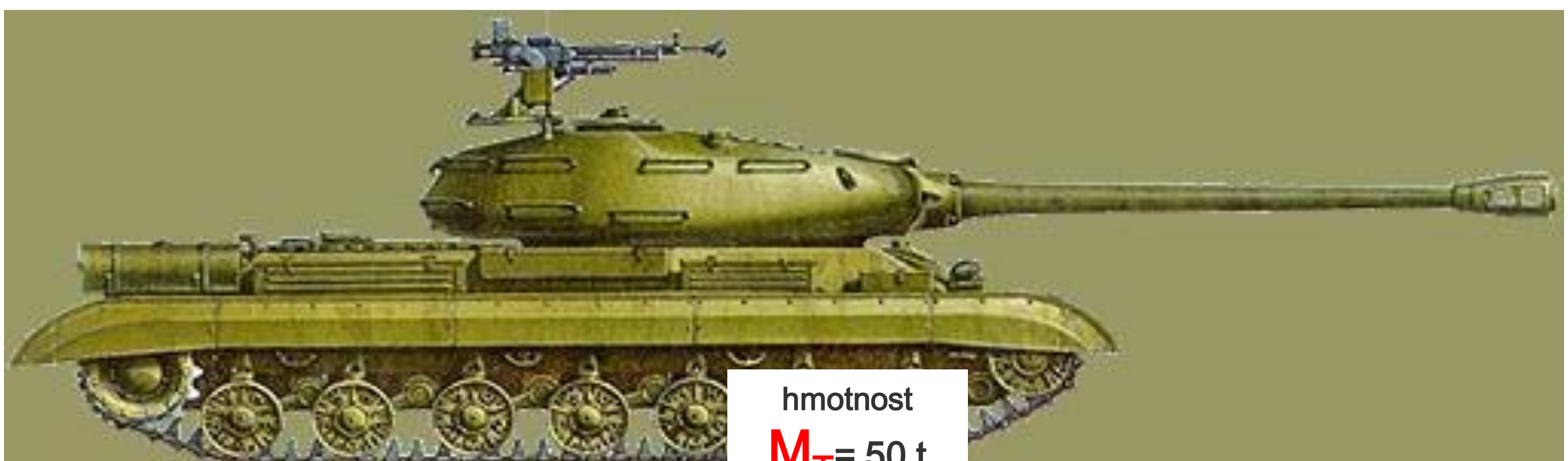
Příklad - Zákon zachování hybnosti a energie

hmotnost M_p = 5 kg

kulka o hmotnosti m = 5g

Zákony zachování

hybnosti		energie
$M_p v_p = - m v$		E=energie prachu v náboji
	$m/M_P = 10^{-3}$	$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}M_p v_p^2 = \frac{1}{2}mv^2 (1 + m/M_p)$
$M_T v_p = - m v$	$m/M_T = 10^{-7}$	$E = \frac{1}{2}mv^2 (1 + m/M_T)$



hmotnost

M_T= 50 t

Příklad - Zákon zachování hybnosti a energie

Hmotnost vrhače

70 kg

140 kg

∞

D

20/1.1 = 18.18 m

20/1.05 = 19.05 m

20 m

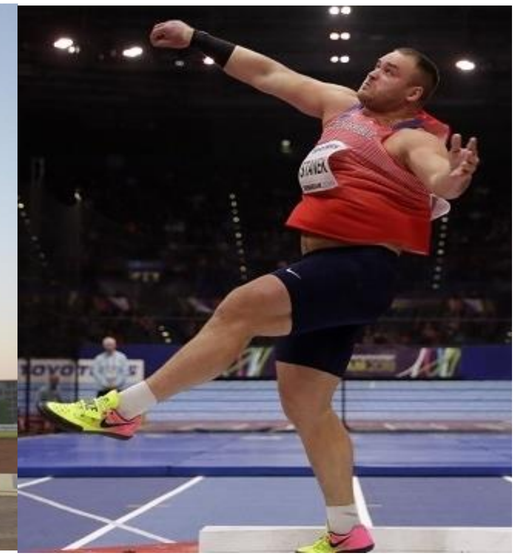
Šebrle

Helcelet

Van der Plaetsen

Desetibojaři

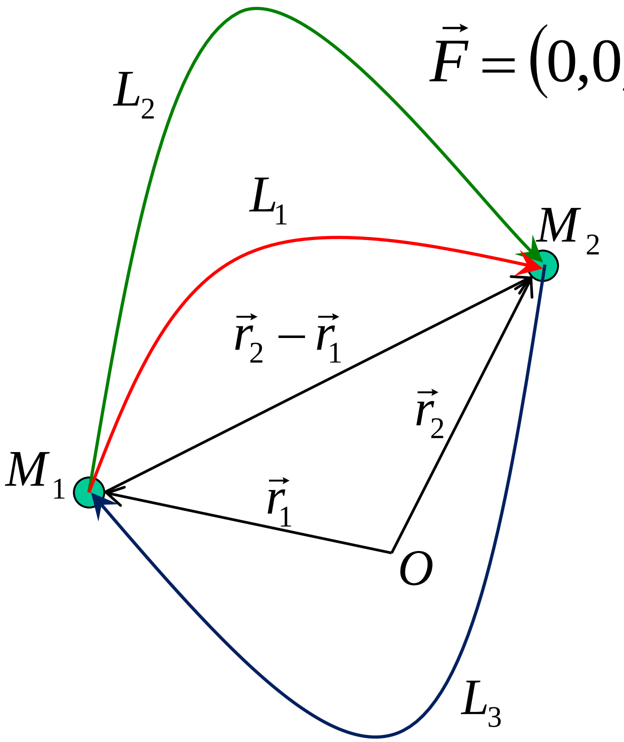
Hoffa



Staněk

Koulaři

Příklad - potenciální energie v homogenním silovém poli



$$\vec{F}=(0,0,F)$$

- Práce A_{21} vykonaná silovým polem z bodu M_1 do bodu M_2 nezávisí na tvaru dráhy mezi oběma body:

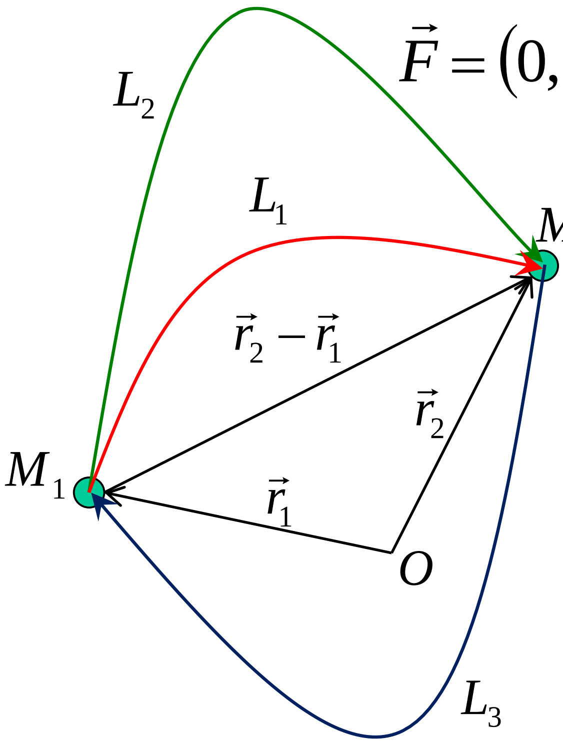
$$A_{21}(L_1)=\int_{L_1(M_1)}^{L_1(M_2)}\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int_{L_1(M_1)}^{L_1(M_2)}\left(F_x\cdot \mathrm{d}x+F_y\cdot \mathrm{d}y+F_z\cdot \mathrm{d}z\right)$$

$$A_{21}(L_1)=\int_{L_1(M_1)}^{L_1(M_2)}F_z\cdot \mathrm{d}z=F(z_2-z_1)+C$$

- Hmotnému bodu můžeme tedy připsat potenciální energii:

$$W_\mathrm{p}(\vec{r})=-A_{21}=-F\cdot z+C$$

Příklad - potenciální energie v homogenním tíhovém poli Země



$$\vec{F} = (0,0,-mg)$$

- Hmotnému bodu můžeme tedy připsat potenciální energii:

$$W_\mathrm{p}(z=0) = 0 - \text{nulová potenciální energie}$$

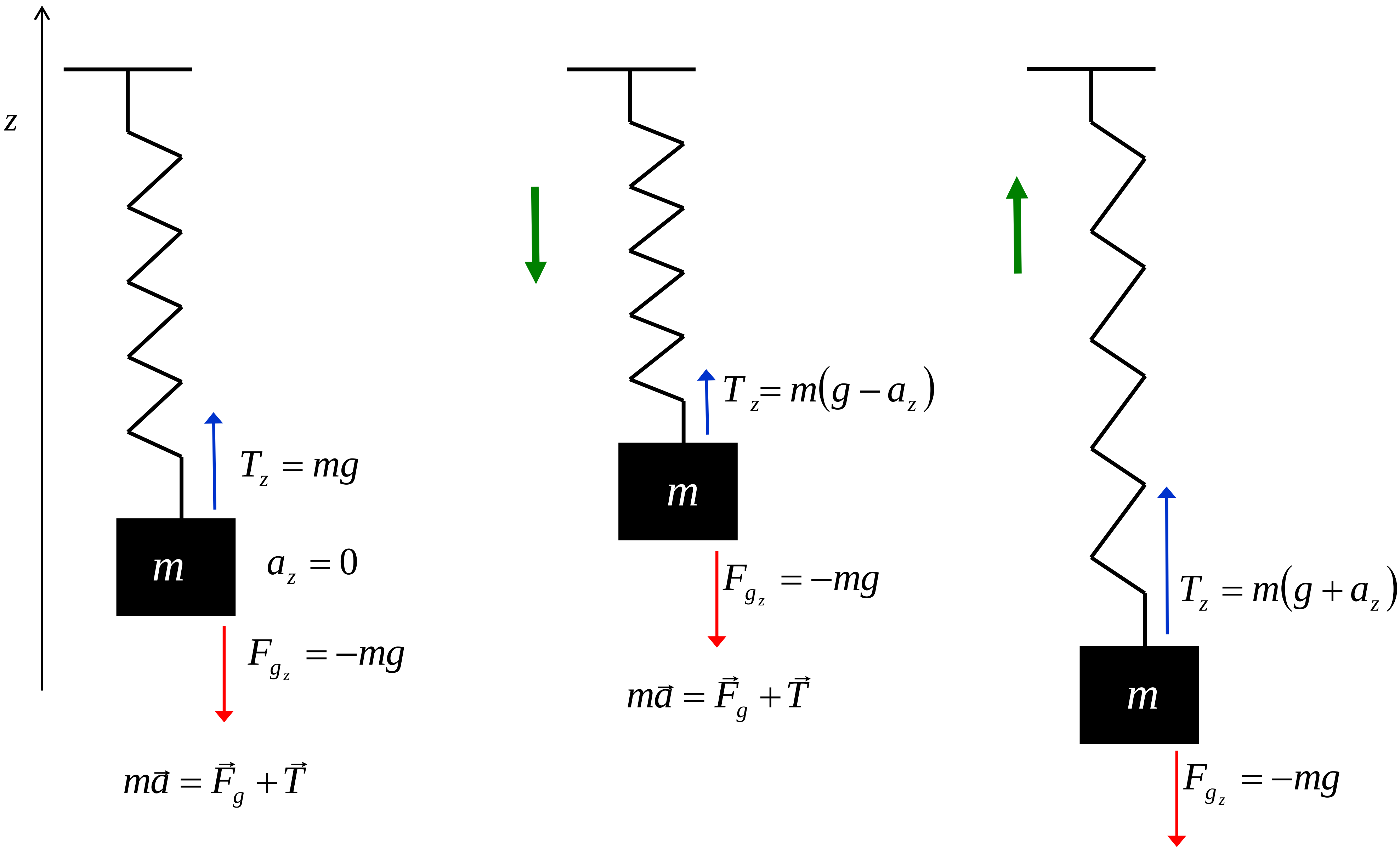
$$z = h - \text{výška nad povrchem Země}$$

$$W_\mathrm{p}(\vec{r}) = -F \cdot z + C \Rightarrow W_\mathrm{p}(h) = mgh$$

- **Zákon zachování mechanické energie** v homogenním tíhovém poli Země můžeme potom psát ve známém tvaru:

$$W_m = W_k + W_p = \frac{1}{2} m v^2 + mgh = konst.$$

Co ukazuje váha?

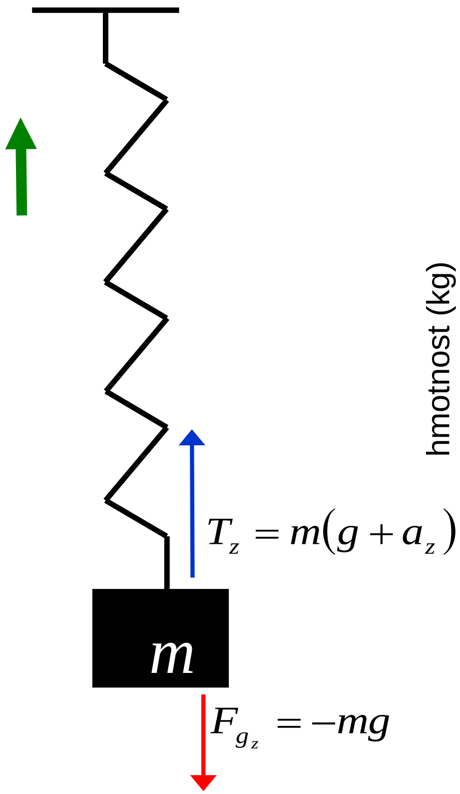


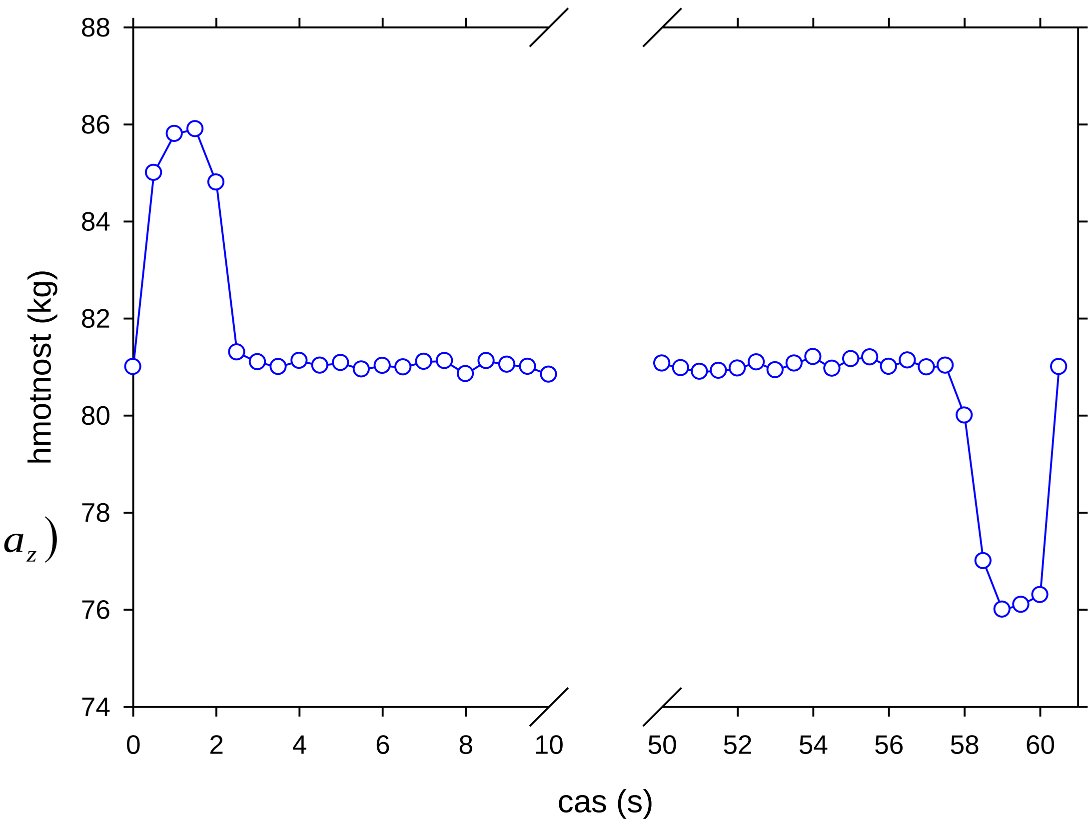
Co ukazuje váha?

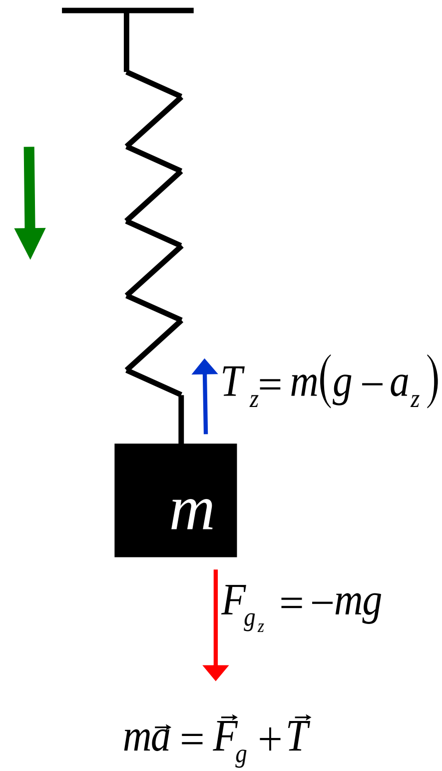
Jedoucí výtah

$$ma \approx 50\,N$$

$$a \approx 0.6\ \mathrm{ms}^{-2} = 0.06g$$

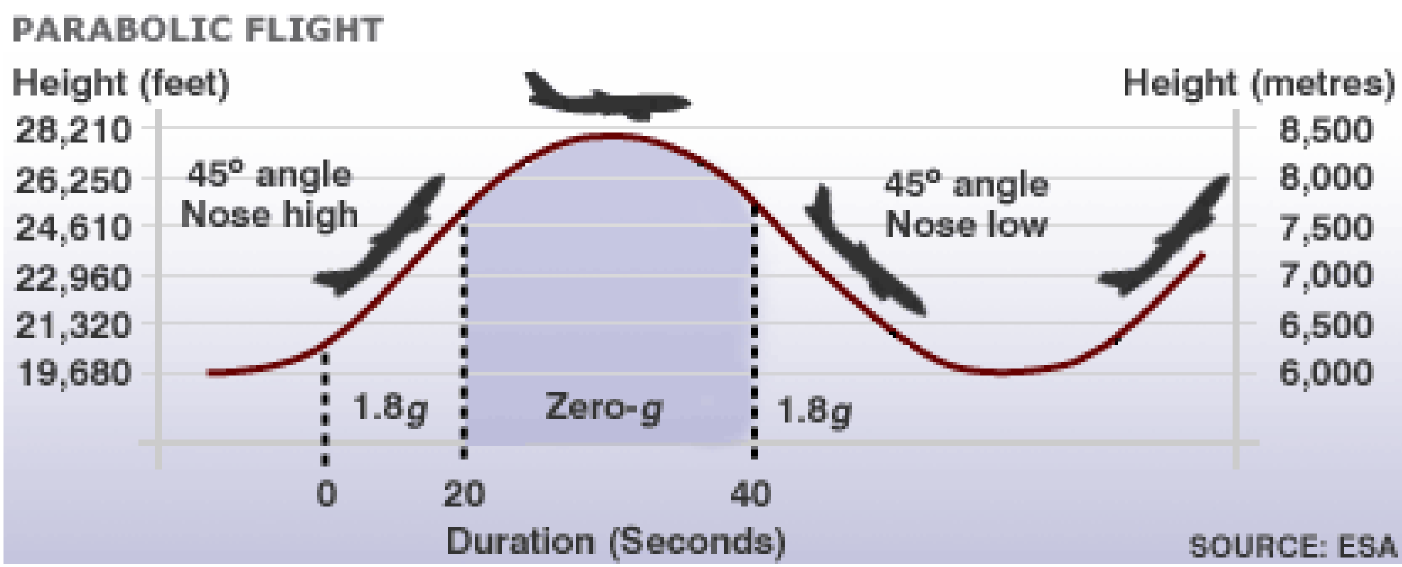


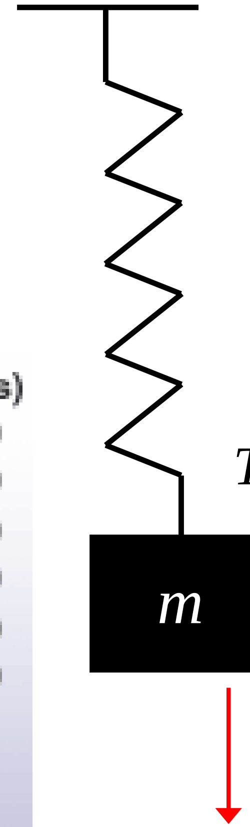




Stav beztíže

- parabolický let



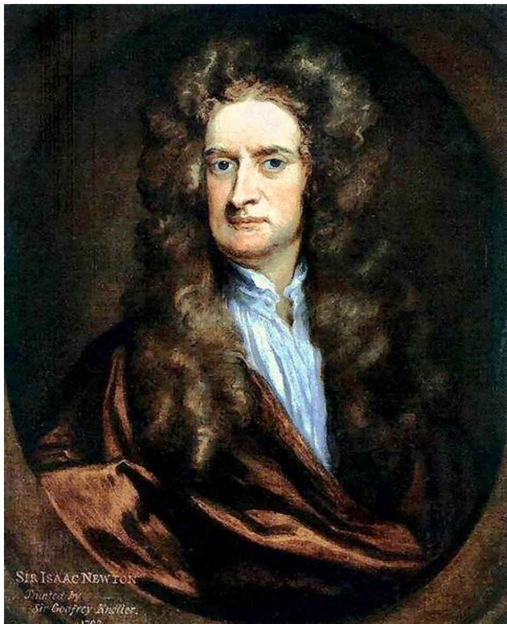


$$T_z = m(g - g) = 0$$

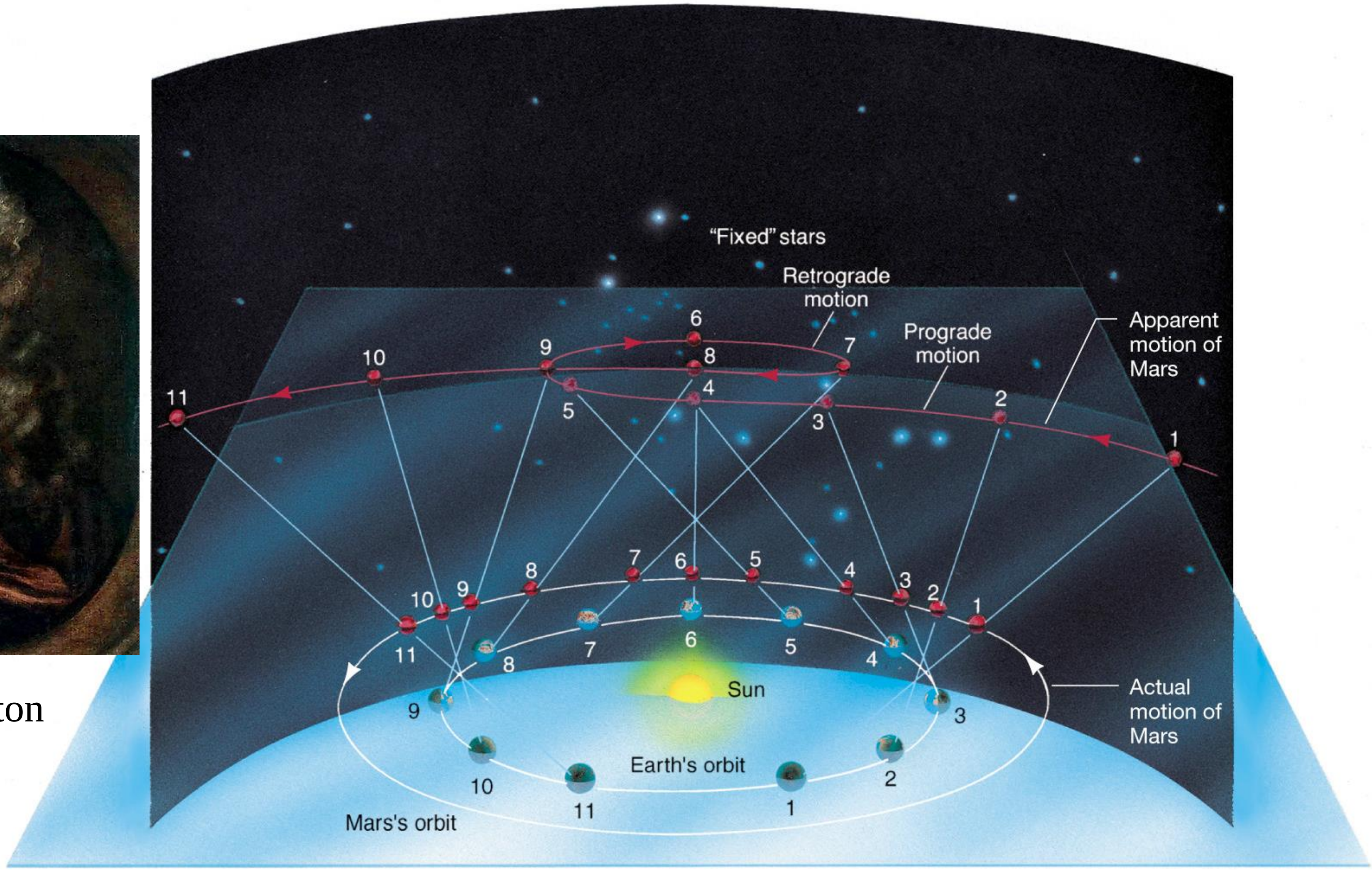
$$a_z = -g$$

$$F_{g_z} = -mg$$

Gravitační zákon



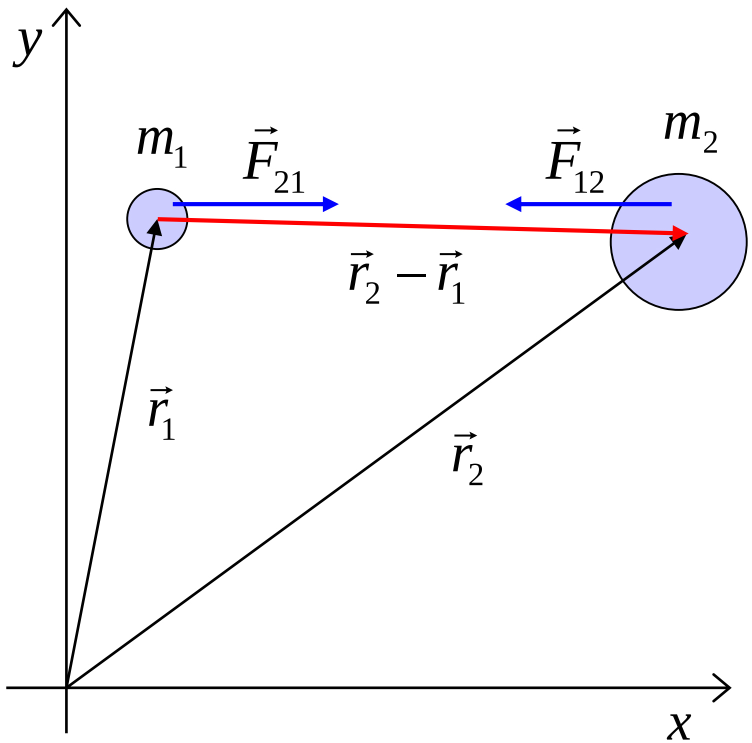
Isaac Newton



Gravitační zákon

$$\vec{F}_{12} = -\kappa \frac{m_1 m_2}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|^2} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|}$$

Formuloval jej Isaac Newton na základě analýzy pohybu Měsíce kolem Země, planet kolem Slunce a na základě znalosti Keplerových zákonů.



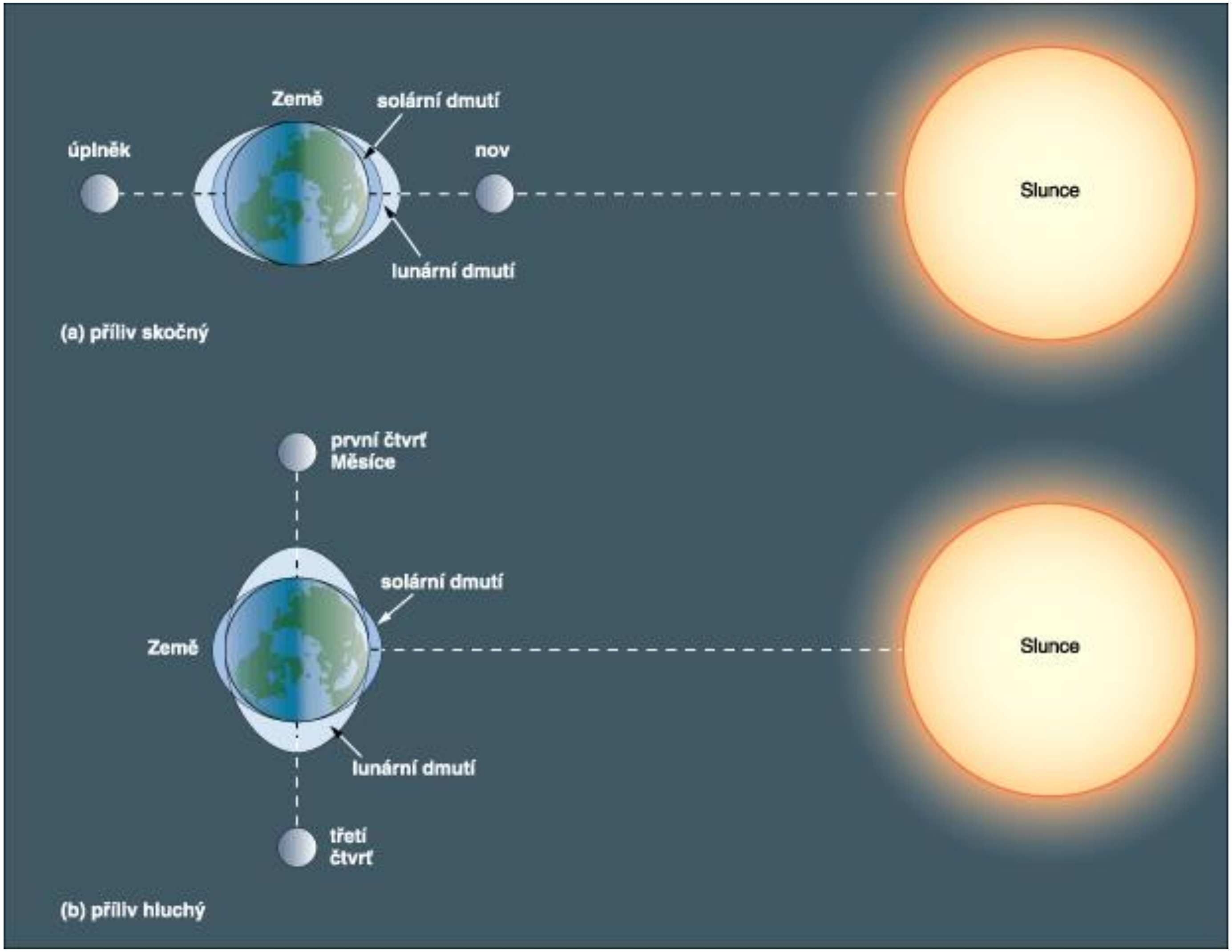
velikost gravitační síly

$$F = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad r \equiv \left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|$$

$$\kappa = 6.670 \times 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2kg^{-2}}\,(\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}})$$

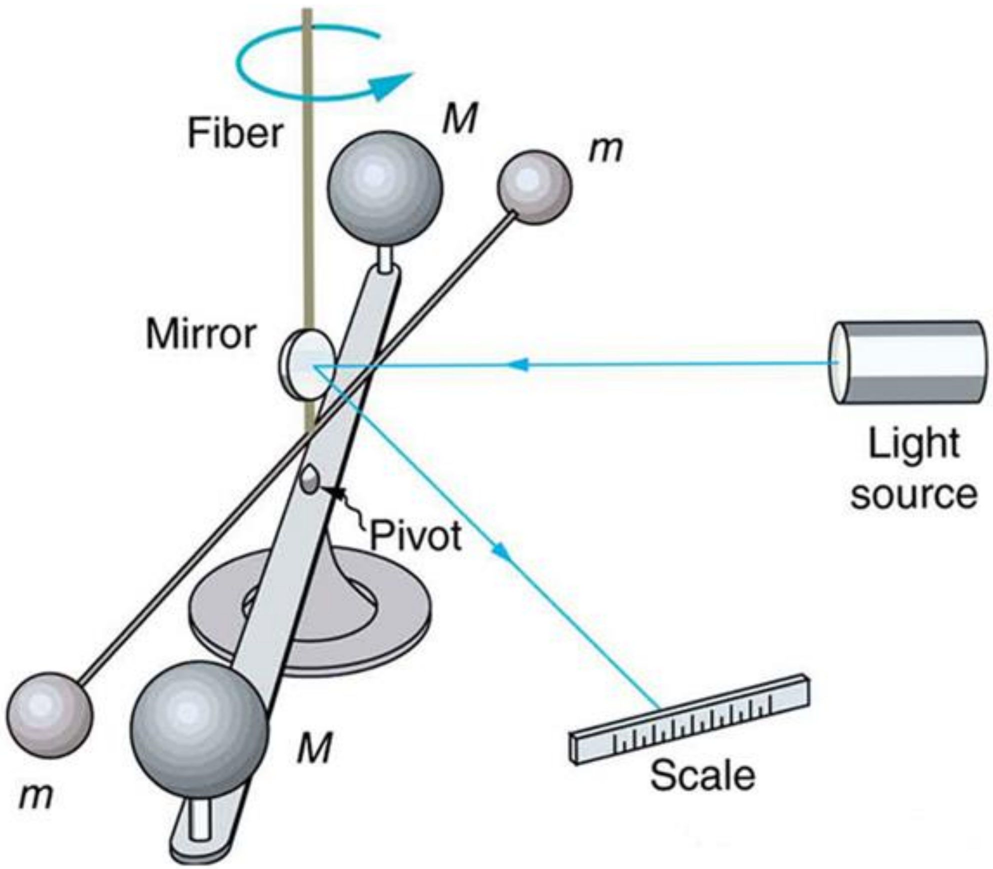
Gravitační zákon

Příliv a odliv



Cavendishův experiment

Vážení Země



$$F = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$\kappa = 6.674 \times 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2kg^{-2}}$$

$$mg = \kappa \frac{m M_Z}{R_Z^2}$$

$$M_Z = \frac{g R_Z^2}{\kappa}$$

$$M_Z = 5.97 \times 10^{24}\ \mathrm{kg}$$

Cavendishův experiment

Vážení Země

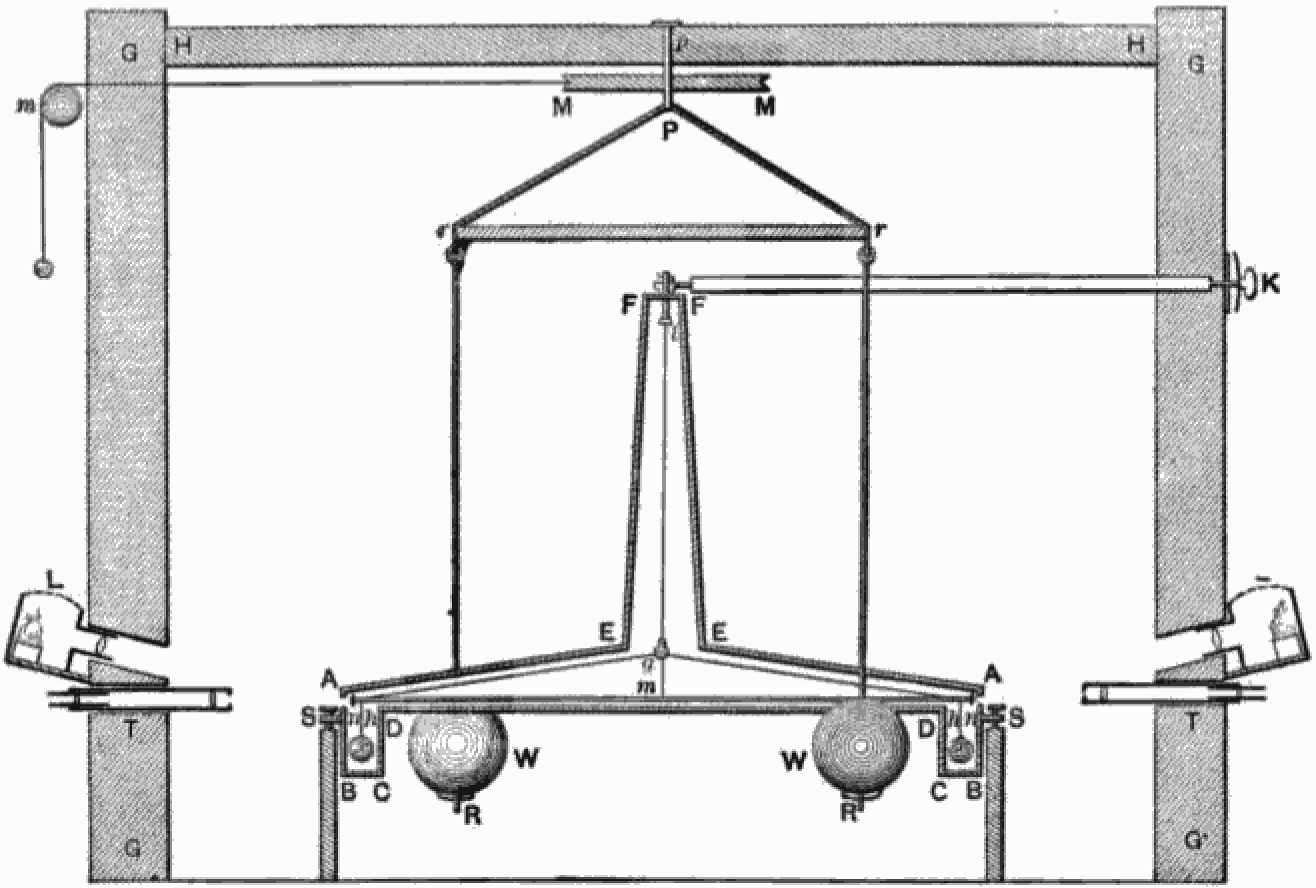
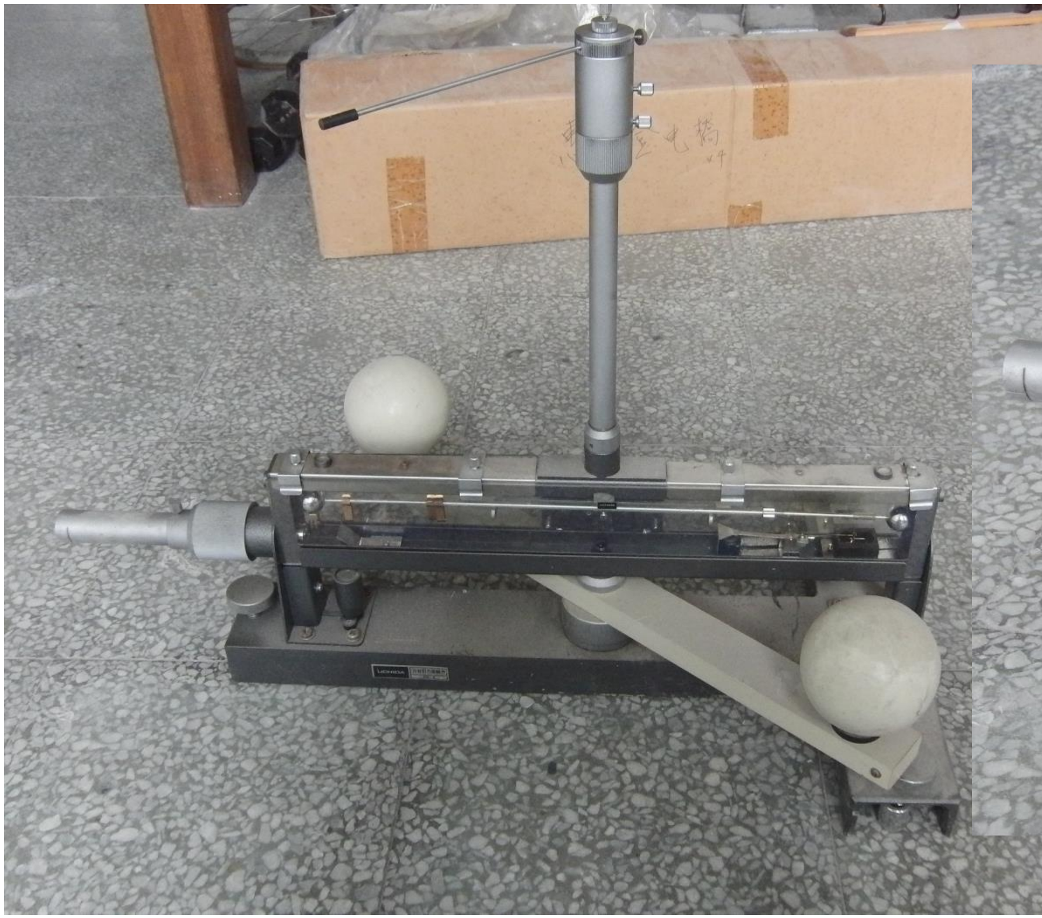


Fig. 1

Cavendishův experiment

Vážení Země



Gravitace

gravitační zákon: $F_g = \kappa \dfrac{m_1 m_2}{r^2}$ $\qquad \kappa = 6.674 \times 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2kg^{-2}}$

Coulombův zákon: $F_e = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{q_1 q_2}{r^2}$ $\qquad \varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\ \mathrm{Fm^{-1}}$

síla působíci mezi dvěma elektrony vzdálenými 1m:

$m = 9.109 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg} \quad q = 1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$

$$F_g = 5.5 \times 10^{-71}\ N$$

$$F_e = 2.3 \times 10^{-28}\ N$$

$$\frac{F_e}{F_g} = 4.2 \times 10^{42}$$

stáří vesmíru je 2×10^{10} let $\approx 10^{18}$ s

světlo proletí protonem za 10^{-24} s

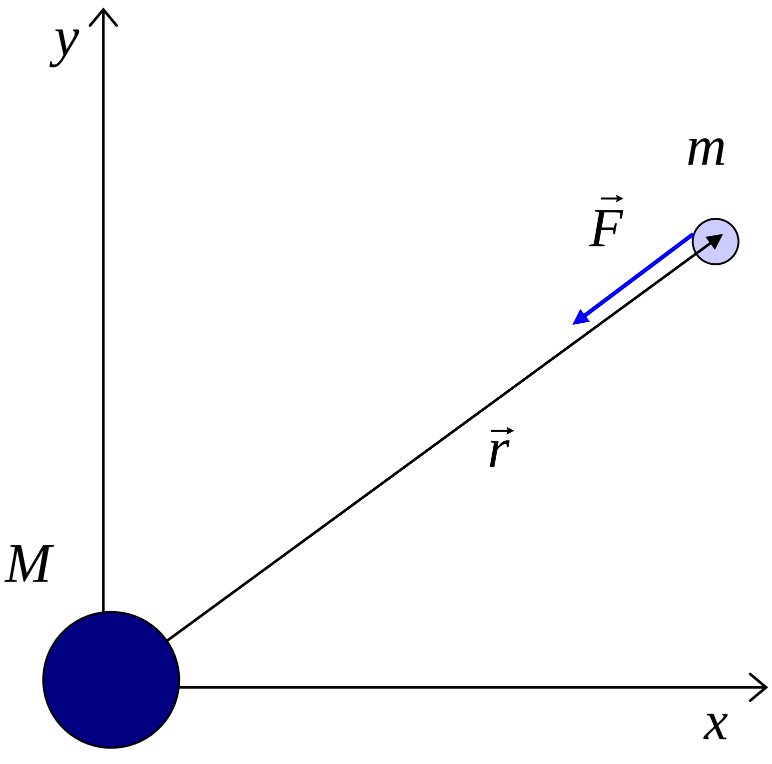
stáří vesmíru v přirozených jednotkách

$10^{18} / 10^{-24} = 10^{42}$

Gravitační pole

Gravitační zákon:

$$M \rangle\rangle m, \quad \vec{F} = -\kappa \frac{mM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$



Intenzitu silového pole definujeme vztahem:

$$\vec{I} \equiv \frac{\vec{F}}{m} \qquad \left[\mathrm{N\,kg^{-1}}\right]$$

Velikost intenzity je číselně rovna síle, která by v daném místě působila síla na těleso o jednotkové hmotnosti

Těleso o hmotnosti *M* vytváří **gravitační pole** o intenzitě :

$$\vec{I}_g = -\kappa \frac{M}{r^2}\vec{e}_r, \quad \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$$

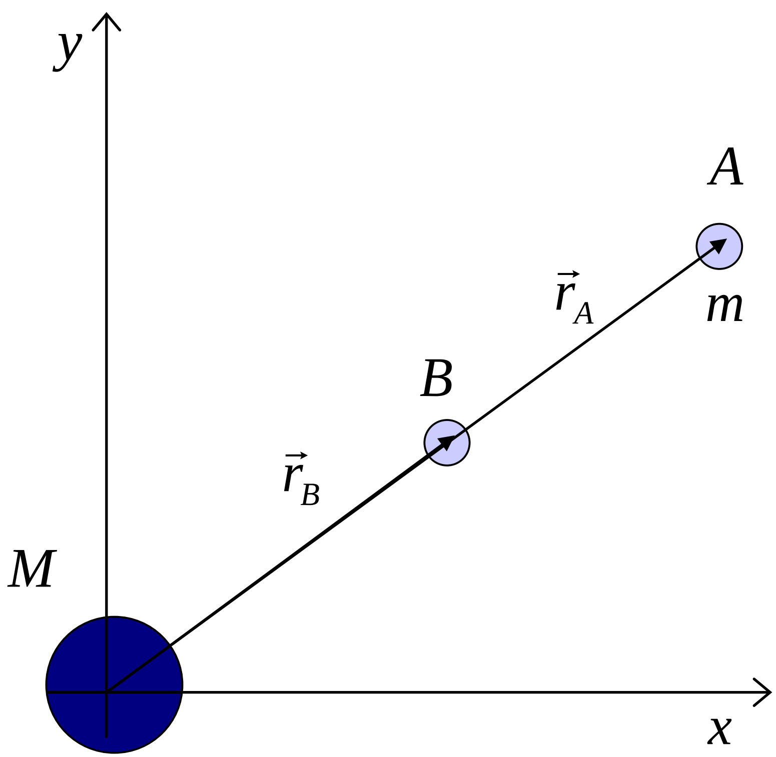
Gravitační pole

Gravitační zákon:

$$M \rangle\rangle m, \quad \vec{F} = -\kappa \frac{mM}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Při přemístění tělesa o hmotnosti m z bodu A do bodu B vykoná gravitační pole práci:

$$A_{AB} = m \int_{r_A}^{r_B} \vec{I}_g \mathrm{d}\vec{r} = m \int_{r_A}^{r_B} -\kappa \frac{M}{r^2} \vec{e}_r \mathrm{d}\vec{r} = mM\kappa \left[\frac{1}{r} \right]_{r_A}^{r_B}$$



$$\Delta W_\mathrm{p} = -A_{AB} = -mM\kappa \left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right]$$

Hmotnému bodu o hmotnosti m v gravitačním poli přísluší tedy potenciální energie:

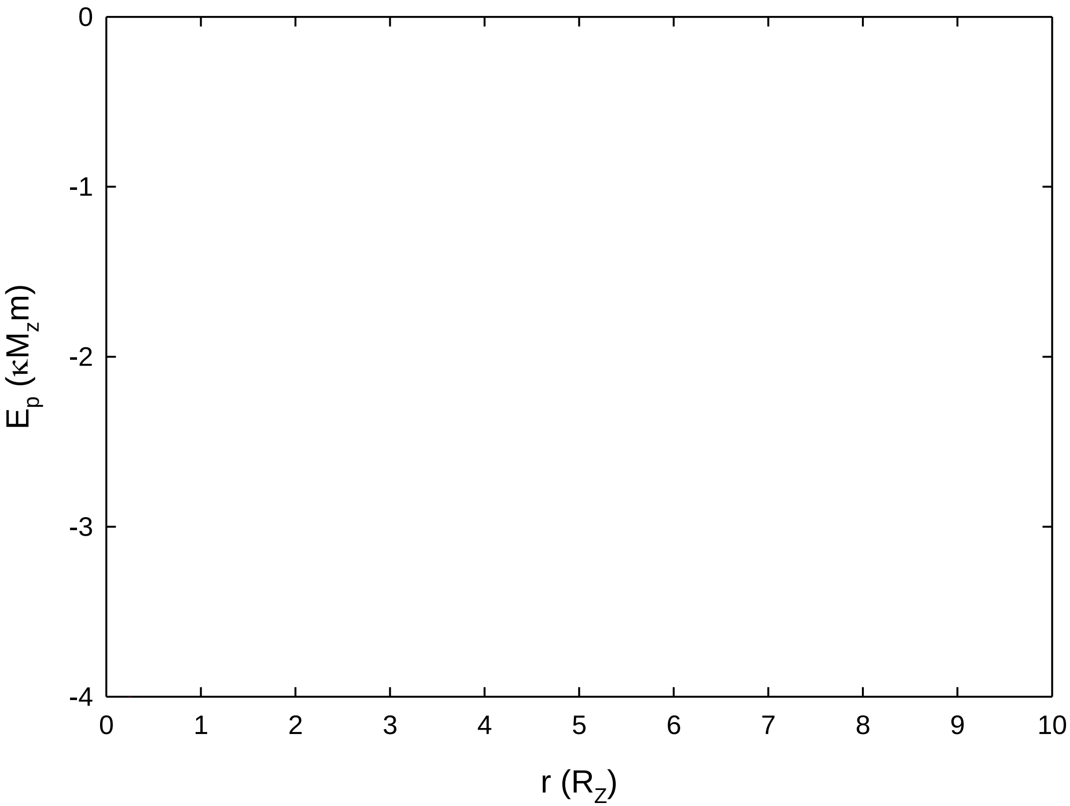
$$W_p(r) = E_p(r) = -\kappa \frac{mM}{r} + C$$

Nulovou potenciální energii zvolíme v nekonečnu:

$$\lim_{r \to \infty} W_p(r) = 0 \Rightarrow W_p(r) = -\kappa \frac{mM}{r}$$

Gravitační pole

Potenciální energie v gravitačním poli: $$E_{\mathrm{p}} = W_{\mathrm{p}}(r) = -\frac{\kappa M_Z m}{r}$$

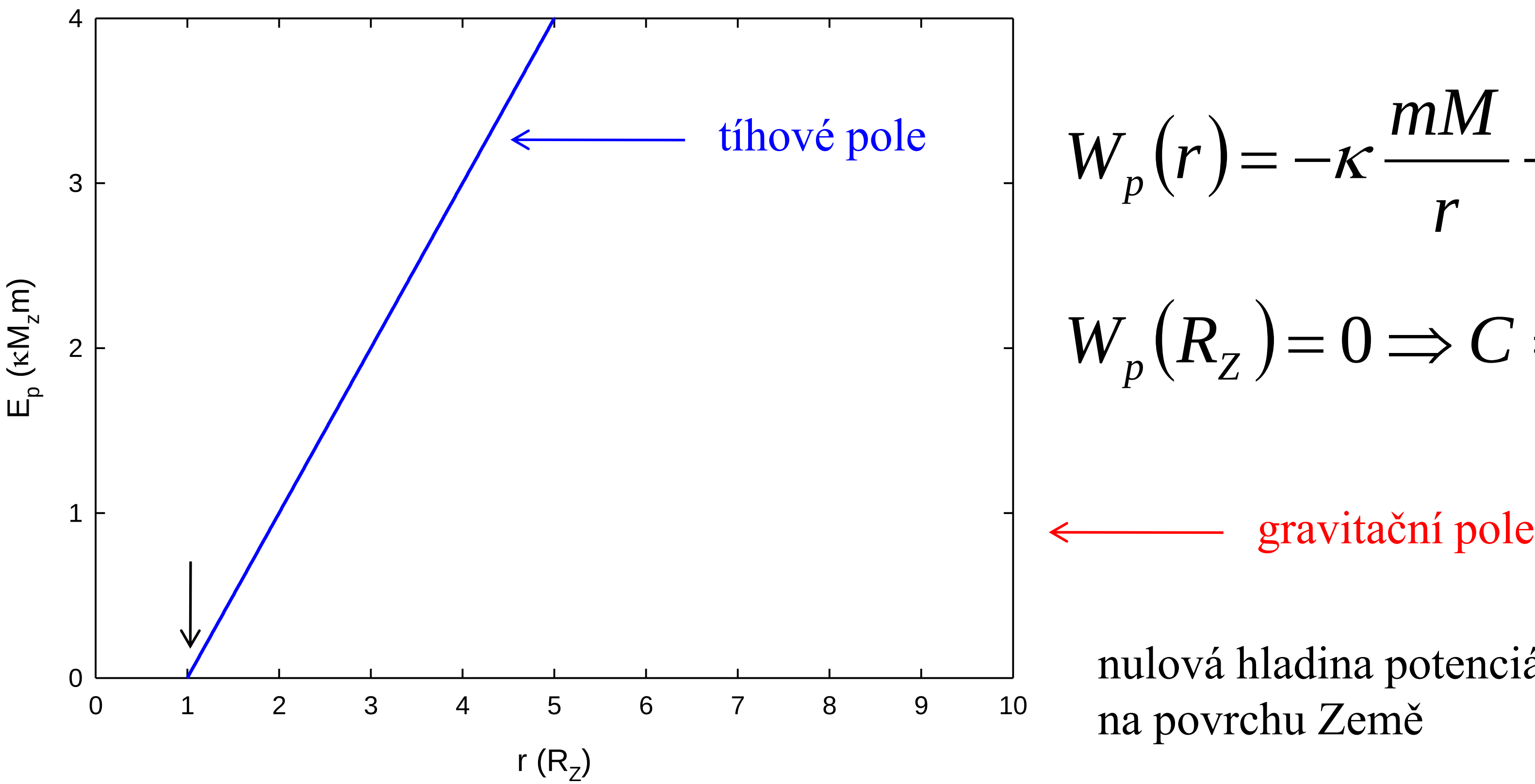


nulová hladina potenciální energie v nekonečnu

Gravitační pole

Potenciální energie v tíhovém poli: $$W_p(r) = mgh = mg(r - R_Z)$$

Potenciální energie v gravitačním poli: $$W_p(r) = \kappa M_Z m\left(\frac{1}{R_Z} - \frac{1}{r}\right) = mg(r - R_Z)\frac{R_Z}{r}$$



$$W_p(r) = -\kappa\frac{mM}{r} + C$$

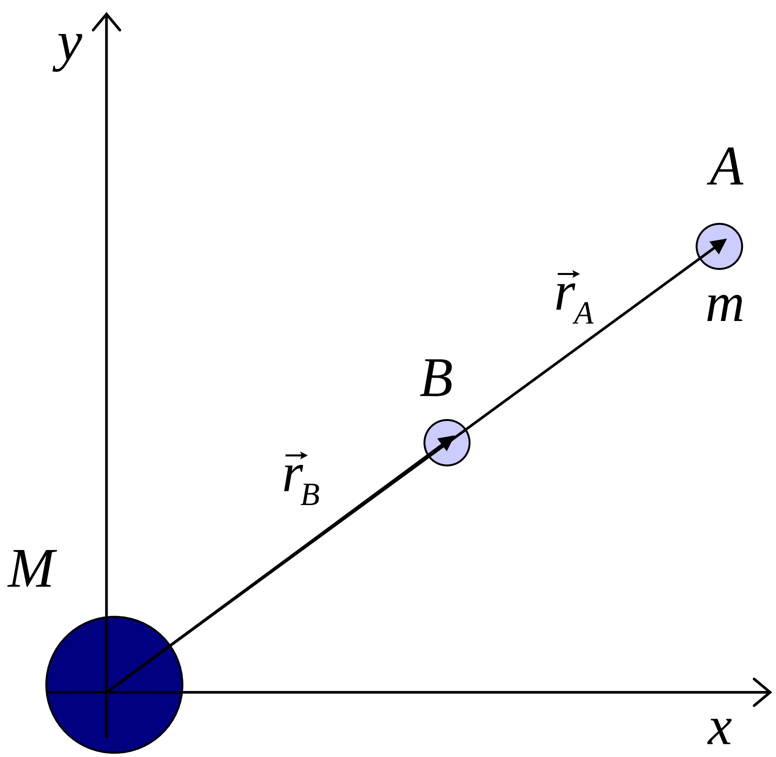
$$W_p(R_Z) = 0 \Rightarrow C = \kappa\frac{mM}{R_Z}$$

nulová hladina potenciální energie na povrchu Země

Gravitační pole

Gravitační zákon:

$$M \rangle\rangle m, \quad \vec{F} = -\kappa \frac{mM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$



Potenciálem silového pole nazveme podíl:

$$\varphi(\vec{r}) \equiv \frac{W_p(\vec{r})}{m} \quad \left[m^2 s^{-2}\right]$$

Číselně se rovná potenciální energii hmotného bodu jednotkové hmotnosti

Potenciál gravitačního pole:

$$\varphi_g(\vec{r}) = \frac{W_p(\vec{r})}{m} = -\kappa \frac{M}{r}$$

Ekvipotenciální plocha – množina bodů prostoru se stejným potenciálem:

$$\varphi(x, y, z) = konst.$$